

## K-SPACES AND BOREL FILTERS ON THE SET OF INTEGERS

JEAN CALBRIX

**ABSTRACT.** We say that a countable, Hausdorff, topological space with one and only one accumulation point is a point-space. For such a space, we give several properties which are equivalent to the property of being a k-space. We study some free filters on the set of integers and we determine if the associated point-spaces are k-spaces or not. We show that the filters of Lutzer-van Mill-Pol are k-filters. We deduce that, for each countable ordinal  $\alpha \geq 2$ , there exists a free filter of true additive class  $\alpha$  (Baire's classification) and a free filter of true multiplicative class  $\alpha$  for which the associated point-spaces are k-spaces but not  $\aleph_0$ , the existence being true in the additive case for  $\alpha = 1$ . In particular, we answer negatively a question raised in J. Calbrix, C. R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 109–111.

### 1. RAPPELS, NOTATIONS

**1.1. Filtres libres sur l'ensemble des entiers.** On note  $\omega$  l'ensemble des entiers naturels. Un filtre  $\mathcal{F}$  sur l'ensemble des entiers est dit *libre* si  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ . Le filtre  $\mathcal{N}$  des parties cofinies de  $\omega$  est appelé filtre de Fréchet. C'est le filtre le moins fin parmi les filtres libres et un filtre  $\mathcal{F}$  est libre ssi  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ .

En identifiant une partie de  $\omega$  à son indicatrice, un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $\omega$  apparaît comme une partie de l'espace métrisable compact  $\{0, 1\}^\omega = 2^\omega$  dit espace de Cantor.

Pour les boréliens de  $2^\omega$ , on utilise la classification de Baire (voir [1], [3], [6]), et pour tout ordinal dénombrable  $\alpha$ , on note  $\mathbf{A}_\alpha$  (resp.  $\mathbf{M}_\alpha$ ) la classe additive (resp. multiplicative) d'ordre  $\alpha$ . De même, on note  $\mathbf{F}_\alpha$  (resp.  $\mathbf{G}_\alpha$ ) les classes engendrées par les fermés (resp. les ouverts).

Un élément  $\beta$  de  $2^\omega$  est noté  $(\beta_0, \beta_1, \dots)$ . Pour tout entier  $n$ , on pose  $\beta|_n = (\beta_0, \dots, \beta_n)$ . L'ensemble des suites finies de 0 et de 1 est noté  $S$ . Soit  $s, s' \in S$  et  $\beta \in 2^\omega$ . On écrit  $s \subset s'$  et  $s \subset \beta$  si  $s'$  et  $\beta$  prolongent  $s$ . Pour tout  $s \in S$ , on note  $I(s)$  l'ensemble des  $\beta \in 2^\omega$  tels que  $s \subset \beta$ . Naturellement, les  $I(s)$  forment une base de la topologie de  $2^\omega$ .

Pour tout  $x \in \{0, 1\}$ , on pose  $\bar{x} = 1 - x$ . Pour tout  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in S$ , on pose  $\bar{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \bar{s}_n)$ .

**1.2. Espaces-point.** Comme dans [2], nous dirons qu'un espace topologique  $X$  est un *espace-point* si  $X$  est un espace topologique, strictement dénombrable, séparé, n'ayant qu'un seul point d'accumulation (que l'on note  $\infty$ ). On identifie  $X \setminus \{\infty\}$

---

Received by the editors December 3, 1993.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 03E15, 04A15, 54-05, Secondary 54C35.

*Key words and phrases.* Borel filters, point-spaces, k-spaces,  $\aleph_0$ -spaces.

avec l'ensemble  $\omega$  (muni de la topologie discrète). L'ensemble des traces des voisinages (ouverts) de  $\infty$  sur  $\omega$  est un filtre libre  $\mathcal{F}$  sur  $\omega$  caractérisant  $X$ , ainsi l'espace  $X$  sera noté  $X_{\mathcal{F}}$ .

Soit  $X$  un espace topologique séparé. Rappelons que  $X$  est un  $k$ -espace si toute partie de  $X$  de traces compactes sur les ensembles compacts est un fermé de  $X$ . L'espace  $X$  est dit de *Fréchet* si pour toute partie  $A \subset X$  et tout  $x \in \overline{A}$  il existe une suite  $(x_n) \subset A$  convergeant vers  $x$ . Il est connu qu'un espace de Fréchet est un  $k$ -espace. L'espace  $X$  est dit  $\aleph_0$  s'il est régulier et s'il existe une suite  $(A_n)$  de parties de  $X$  telle que pour toute partie compacte  $K$  et tout ouvert  $G$  contenant  $K$ , il existe  $n$  tel que  $K \subset A_n \subset G$  (E. Michael).

Nous dirons qu'un filtre libre  $\mathcal{F}$  sur  $\omega$  est un  $k$ -filtre si l'espace  $X_{\mathcal{F}}$  est un  $k$ -espace. De même, nous dirons que  $\mathcal{F}$  est  $\aleph_0$  si l'espace  $X_{\mathcal{F}}$  est  $\aleph_0$ .

Pour un espace-point  $X_{\mathcal{F}}$ , nous dirons qu'une partie  $F$  de  $X_{\mathcal{F}}$  est du deuxième type si le point  $\infty$  est point d'accumulation de  $F$ . Evidemment, une partie compacte de  $X_{\mathcal{F}}$  est du deuxième type ssi elle est infinie.

### 1.3. Définition de certains filtres.

#### 1.3.1. Filtres de type $\mathcal{A}$ .

Soit  $X$  un espace métrisable séparable possédant une partie strictement dénombrable, dense, constituée de points isolés (que l'on identifie à  $\omega$ ). On pose  $A = X \setminus \omega$ . L'espace quotient obtenu en identifiant les points de  $A$  est un espace-point  $X_{\mathcal{F}}$  que nous dirons de type  $\mathcal{A}$  (Arhangel'skii, cf. [2]). Le filtre  $\mathcal{F}$  sera dit aussi de type  $\mathcal{A}$ . Les filtres de type  $\mathcal{A}$  sont des  $k$ -filtres,  $\aleph_0$  ([2]).

#### 1.3.2. Filtres de type $\mathcal{LvMP}$ .

L'application  $\psi : 2^{\omega} \longrightarrow 2^S$  définie par  $\psi((\beta_0, \beta_1, \dots)) = \{(\beta_0), (\beta_0, \beta_1), \dots\} = \tilde{\beta}$  est un homéomorphisme de  $2^{\omega}$  sur son image. A toute partie  $H$  de  $2^{\omega}$ , correspond une partie  $\tilde{H} = \psi(H) \cup \mathcal{P}_f(S)$  où  $\mathcal{P}_f(S)$  est l'ensemble des parties finies de  $S$ . Clairement,  $\tilde{H}$  est une sous-base d'un idéal  $\mathcal{I}_H$  de parties de  $S$ . Le filtre dual  $\mathcal{F}_H = \{A^c / A \in \mathcal{I}_H\}$  est libre. Il sera dit de type  $\mathcal{LvMP}$  ([1], [4], [7]). L'espace-point associé (en identifiant mentalement  $S$  à  $\omega$ ) sera noté  $X_H$  et dit lui aussi de type  $\mathcal{LvMP}$ . Nous avons montré dans [1] que pour tout ordinal dénombrable  $\alpha \geq 1$ , si  $H$  est une partie de vraie classe additive  $\alpha$ , alors il en est de même de  $\mathcal{F}_H$ .

#### 1.3.3. Filtres de type produit et de type $\mathcal{Ka}$ .

Soit  $(A_n)$  une partition de  $\omega$  strictement dénombrable constituée de parties strictement dénombrables et soit sur chaque  $A_n$  un filtre libre  $\mathcal{F}_n$  que l'on "relève" en un filtre  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  sur  $\omega$  ( $\tilde{\mathcal{F}}_n = \{A \subset \omega / A \cap A_n \in \mathcal{F}_n\}$ ). Le filtre  $\bigcap \tilde{\mathcal{F}}_n$  sera dit du type produit et le filtre  $\bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \tilde{\mathcal{F}}_m$  sera dit du type  $\mathcal{Ka}$  (Katetov).

Il est montré dans [1] que, pour tout ordinal dénombrable  $\alpha$ , si les  $\mathcal{F}_n$  sont de vraie classe  $\mathbf{A}_{\alpha}$  (resp.  $\mathbf{M}_{\alpha}$ ),  $\bigcap \tilde{\mathcal{F}}_n$  (resp.  $\bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \tilde{\mathcal{F}}_m$ ) est de vraie classe  $\mathbf{M}_{\alpha+1}$  (resp.  $\mathbf{A}_{\alpha+1}$ ).

## 2. LA PROPRIÉTÉ DE $K$ -ESPACE POUR LES ESPACES-POINT

La propriété suivante, très simple et de démonstration aisée, sera utile pour la suite :

**Lemme 2.1.** *Un espace-point est un  $k$ -espace ssi tout fermé du deuxième type contient une partie compacte infinie. En conséquence, un espace-point est un  $k$ -espace ssi il est de Fréchet.*

*Démonstration.* Soit  $X_{\mathcal{F}}$  un espace-point. Supposons que  $X_{\mathcal{F}}$  soit un k-espace. Soit  $A$  un fermé du deuxième type. S'il ne contenait pas de partie compacte infinie alors  $A \setminus \{\infty\}$  serait fermé, ce qui est absurde. Inversement supposons que  $X_{\mathcal{F}}$  ne soit pas un k-espace. Soit une partie  $A$  non fermée (donc du deuxième type avec  $\infty \notin A$ ) telle que la trace sur elle de toute partie compacte soit compacte. La partie  $\bar{A} = A \cup \{\infty\}$  est un fermé du deuxième type qui ne peut évidemment pas contenir une partie compacte infinie.  $\square$

Notons  $A_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des ultrafiltres contenant  $\mathcal{F}$ . L'ensemble  $A_{\mathcal{F}}$  est une partie fermée de  $\beta\omega$ , le compactifié de Stone-Čech de  $\omega$ . De plus,  $A_{\mathcal{F}} \subset (\beta\omega \setminus \omega)$  ssi  $\mathcal{F}$  est libre. Rappelons qu'un fermé régulier  $A$  d'un espace topologique est un fermé tel que  $\overset{\circ}{\bar{A}} = A$ . Nous obtenons la caractérisation intéressante suivante:

**Théorème 2.2.**  $\mathcal{F}$  est un k-filtre ssi  $A_{\mathcal{F}}$  est un fermé régulier du sous-espace  $\beta\omega \setminus \omega$ .

*Démonstration.* Pour tout  $H \subset \omega$ , on pose  $\tilde{H} = H \cup \{\infty\}$ ,  $H^* = \overline{H}^{\beta\omega}$ ,  $H^{**} = H^* \setminus \omega$ . Rappelons que, par définition, la collection  $\{H^* / H \subset \omega\}$  est une base d'ouverts de la topologie de  $\beta\omega$ .

Les éléments de  $\beta\omega$  seront notés  $\mathcal{U}, \mathcal{U}', \dots$

FAIT 1. Soit  $\mathcal{F}$  un filtre libre. On a  $A_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{U} / \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\}$  est un fermé du sous-espace  $\beta\omega \setminus \omega$ . En effet,  $\mathcal{F}$  étant libre, si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$  alors  $\mathcal{U}$  est libre et donc est dans  $\beta\omega \setminus \omega$ . Soit un ultrafiltre  $\mathcal{U}'$  tel que on a  $\mathcal{U}' \notin A_{\mathcal{F}}$ . Soit  $H \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}'$ , donc  $(H^c)^*$  est un voisinage de  $\mathcal{U}'$  disjoint de  $A_{\mathcal{F}}$ .

FAIT 2. Soit  $A$  non vide inclus dans  $\beta\omega \setminus \omega$ . On pose  $\mathcal{F}_A = \bigcap \{\mathcal{U} / \mathcal{U} \in A\}$ . On a  $A_{\mathcal{F}_A} = \bar{A}$ . En effet,  $A_{\mathcal{F}_A}$  est fermé d'après le fait 1 et contient  $A$ . Donc  $\bar{A} \subset A_{\mathcal{F}_A}$ . Inversement, soit  $\mathcal{U}' \notin \bar{A}$  et soit  $H \in \mathcal{U}'$  tel que  $H^* \cap A = \emptyset$ . Pour tout  $\mathcal{U} \in A$ ,  $H^c \in \mathcal{U}$  et donc  $H^c \in \mathcal{F}_A$ . Par suite,  $H^c \in \mathcal{U}$  pour tout  $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}_A$ , donc  $H^* \cap A_{\mathcal{F}_A} = \emptyset$  et donc  $\mathcal{U}' \notin A_{\mathcal{F}_A}$ .

En conséquence, l'application de l'ensemble des fermés non vides de  $\beta\omega \setminus \omega$  sur l'ensemble des filtres libres de  $\omega$  définie par  $A \longrightarrow \bigcap \{\mathcal{U} / \mathcal{U} \in A\}$  est une bijection.

FAIT 3. Soit  $A$  non vide inclus dans  $\beta\omega \setminus \omega$ . On a  $\mathcal{F}_A = \{G \cap \omega / G \text{ ouvert de } \beta\omega; G \supset A\} = \{G \cap \omega / G \text{ ouvert de } \beta\omega; G \supset \bar{A}\} = \{H / H^* \supset A\}$ .

FAIT 4. Soit  $A$  non vide, inclus et fermé dans  $\beta\omega \setminus \omega$ . Soit  $K \subset \omega$ . La partie  $\tilde{K}$  est une partie compacte infinie de  $X_{\mathcal{F}_A}$  ssi  $K^{**}$  est non vide et inclus dans  $\overset{\circ}{\bar{A}}$ . En effet, si  $\tilde{K}$  est une partie compacte infinie de  $X_{\mathcal{F}_A}$ , nécessairement,  $K^{**} \subset A$  et donc  $K^{**} \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$ . Inversement, si  $K^{**}$  est non vide et dans  $\overset{\circ}{\bar{A}}$  et si  $F \in \mathcal{F}_A$ , on a  $K \setminus F = K^* \setminus F^*$  fini et donc  $\tilde{K}$  est une partie compacte infinie de  $X_{\mathcal{F}_A}$ .

*Fin de la démonstration du théorème 2.2.* Soit  $A$  fermé non régulier de  $\beta\omega \setminus \omega$ . Soit  $\mathcal{U}' \in A \setminus \bar{A}$ . Soit  $H \in \mathcal{U}'$  tel que  $H^* \cap \bar{A} = \emptyset$ . D'après le fait 4,  $\tilde{H}$  est un fermé de  $X_{\mathcal{F}_A}$  du deuxième type ne contenant pas de partie compacte infinie donc  $X_{\mathcal{F}_A}$  n'est pas un k-filtre.

Réciproquement, supposons que  $X_{\mathcal{F}_A}$  ne soit pas un k-filtre. Soit  $H \subset \omega$  tel que  $\tilde{H}$  soit un fermé de  $X_{\mathcal{F}_A}$  du deuxième type ne contenant pas de partie compacte

infinie. On a  $H^{**} \cap A \neq \emptyset$  mais  $H^{**} \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$ . Donc  $A$  n'est pas un fermé régulier de  $\beta\omega \setminus \omega$ .  $\square$

On construit aisément tous les  $k$ -filtres:

**Proposition 2.3.** *Soit  $\mathcal{K}$  une collection de parties de  $\omega$  telle qu'un élément au moins de  $\mathcal{K}$  soit infini alors le filtre  $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \{ A \subset \omega / \forall K \in \mathcal{K} \quad K \setminus A \text{ est fini} \}$  est un  $k$ -filtre et la collection  $\{ K \cup \{\infty\} / K \in \mathcal{K} \}$  est incluse dans la collection des parties compactes de l'espace-point associé. Inversement, soit  $\mathcal{F}$  un filtre libre sur  $\omega$  et soit  $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des traces sur  $\omega$  des parties compactes de l'espace-point associé. Si  $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$  contient un élément infini alors le filtre  $\{ A \subset \omega / \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}} \quad K \setminus A \text{ est fini} \}$  est le plus petit  $k$ -filtre contenant  $\mathcal{F}$ .*

**Corollaire 2.4.** *Avec les notations du théorème précédent, si  $\mathcal{K}$  est analytique alors  $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$  est co-analytique.*

*Inversement, soit  $\mathcal{F}$  un  $k$ -filtre et soit  $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des traces sur  $\omega$  des parties compactes de l'espace-point associé. Si  $\mathcal{F}$  est analytique alors  $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$  est co-analytique. En particulier, si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$  sont simultanément analytiques alors ils sont boréliens.*

La démonstration de la proposition 2.3 est assez directe en utilisant le lemme 2.1 et le corollaire 2.4 en résulte en utilisant le fait que  $\{ (F, K) \in 2^\omega \times 2^\omega / K \setminus F \text{ est fini} \}$  est un  $F_\sigma$ .

Les filtres de type  $\mathcal{A}$  sont des  $k$ -filtres (en effet, l'image quotient d'un  $k$ -espace est un  $k$ -espace).

On a aussi:

**Théorème 2.5.** *Les filtres de type  $\mathcal{LvMP}$  sont des  $k$ -filtres.*

*Démonstration.* Soit  $H \subset 2^\omega$ ,  $\mathcal{F}_H$  le filtre de type  $\mathcal{LvMP}$  correspondant, et  $X_H$  l'espace-point associé. Nous allons appliquer le critère du lemme 2.1.

Soit  $B \subset X_H$  un fermé du deuxième type. Nous dirons qu'une partie infinie  $E$  de  $B$  est une  $H$ -chaîne maximale s'il existe  $\beta \in H$  tel que  $E = B \cap \tilde{\beta}$ . On notera  $E = q^\beta$  et naturellement,  $q^\beta = \{\beta|_{n_0}, \beta|_{n_1}, \dots\}$  pour une suite d'entiers strictement croissante.

Ou il n'existe dans  $B$  qu'une collection finie  $q^{\beta^0}, q^{\beta^1}, \dots, q^{\beta^k}$  de  $H$ -chaînes maximales alors  $B \setminus \bigcup_{i=0}^k q^{\beta^i} = B \setminus \bigcup_{i=0}^k \tilde{\beta}^i$  est une partie compacte du deuxième type.

Ou il existe une infinité de  $H$ -chaînes maximales  $q^{\beta^0}, q^{\beta^1}, \dots$ . Soit  $s^0 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p_0})$  dans  $S$  telle que  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p_0}) \subset \beta^k$  pour une infinité de  $k$  et  $\overline{s^0} \subset \beta^{k_0}$  pour au moins un  $k_0$ . Choisissons  $m_0 \geq p_0$  tel que  $\overline{s^0} \subset (\beta_0^{k_0}, \beta_1^{k_0}, \dots, \beta_{m_0}^{k_0}) \in q^{\beta^{k_0}} \subset B$ . On poursuit la construction par récurrence. Supposons construits les  $s^i = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p_0}, \dots, \beta_{p_i})$  et les  $(\beta_0^{k_i}, \dots, \beta_{m_i}^{k_i}) \in B$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, r$  avec  $p_0 < p_1 < \dots < p_r$ ,  $\overline{s^i} \subset (\beta_0^{k_i}, \dots, \beta_{m_i}^{k_i}) \in q^{\beta^{k_i}}$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, r$  et  $s^r \subset \beta^k$  pour une infinité de  $k$ . On peut alors trouver  $s^{r+1} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p_0}, \dots, \beta_{p_{r+1}})$  tel que  $p_{r+1} > p_r$ ,  $s^{r+1} \subset \beta^k$  pour une infinité de  $k$  et  $\overline{s^{r+1}} \subset \beta^{k_{r+1}}$  pour un  $k_{r+1}$ . On choisit alors  $m_{r+1} \geq k_{r+1}$  tel que  $\overline{s^{r+1}} \subset (\beta_0^{k_{r+1}}, \dots, \beta_{m_{r+1}}^{k_{r+1}}) \in q^{\beta^{k_{r+1}}} \subset B$ . Il est clair que  $K = \{ (\beta_0^{k_0}, \dots, \beta_{m_i}^{k_i}) / i \in \omega \} \cup \{\infty\}$  est une partie compacte du deuxième type incluse dans  $B$ .  $\square$

Un filtre de type  $\mathcal{K}a$  n'est jamais un  $k$ -filtre (les parties compactes de l'espace point associé sont finies). Par contre, un filtre de type produit est un  $k$ -filtre ssi les filtres associés  $\mathcal{F}_n$  sont des  $k$ -filtres.

Le filtre  $\left\{ A \subset \omega \mid \sum_{n \notin A} \frac{1}{n} < +\infty \right\}$  est un filtre libre  $K_\sigma$  qui n'est pas un  $k$ -filtre.

On déduit de ce qui précède et de [1]:

**Théorème 2.6.** *Pour tout ordinal dénombrable  $\alpha \geq 2$ , chaque classe  $\mathbf{A}_\alpha \setminus \mathbf{M}_\alpha$  et  $\mathbf{M}_\alpha \setminus \mathbf{A}_\alpha$  contient un  $k$ -filtre. Il en est de même de la classe  $F_\sigma \setminus G_\delta$ . Pour tout ordinal dénombrable  $\alpha \geq 1$ , chaque classe  $\mathbf{F}_\alpha \setminus \mathbf{G}_\alpha$  contient un filtre libre non  $k$ -filtre.*

### 3. LA PROPRIÉTÉ $\aleph_0$

Nous savons que les filtres de type  $\mathcal{A}$  sont  $\aleph_0$ . Par ailleurs, il est montré dans [4] que, pour  $H = 2^\omega$ , le filtre  $\mathcal{F}_H$  de type  $\mathcal{L}vMP$  n'est pas  $\aleph_0$ . Nous généralisons ce résultat:

**Théorème 3.1.** *Soit  $\mathcal{F}_H$  un filtre de type  $\mathcal{L}vMP$ . Si  $H$  contient un sous-ensemble  $C$  homéomorphe à l'espace de Cantor alors  $\mathcal{F}_H$  n'est pas  $\aleph_0$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $\beta \in C$  et tout  $n \in \omega$ , il existe  $m > n$  tel que  $I(\beta_0, \dots, \beta_m) \cap C \neq \emptyset$  et  $I(\beta_0, \dots, \beta_{m-1}, \overline{\beta_m}) \cap C \neq \emptyset$ . Cette propriété sera appliquée dans la récurrence qui va suivre.

Soit  $(A_n)$  une suite de parties de  $2^S$  et posons  $\tilde{A}_n = A_n \cup \{\infty\}$ . Soit  $s^0 = (\beta_0, \dots, \beta_{n_0})$  tel que  $I(s^0) \cap C \neq \emptyset$  et si  $\overline{s^0} \in A_0$  alors  $s^0 \in A_0$ . Supposons construit  $s^k = ((\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_0}, \dots, \beta_{n_k}), \dots, \beta_{n_{k+1}})$ , on peut trouver  $s^{k+1} = (\beta_0, \dots, \beta_{n_0}, \dots, \beta_{n_k}, \dots, \beta_{n_{k+1}})$  tel que  $n_k < n_{k+1}$ ,  $I(s^{k+1}) \cap C \neq \emptyset$  et si  $\overline{s^{k+1}} \in A_{k+1}$  alors  $s^{k+1} \in A_{k+1}$ . On construit ainsi un élément  $\beta$  de  $2^\omega$  dans  $C$ . Posons  $K = \{ \overline{s^i} \mid i \in \omega \} \cup \{\infty\}$ . Clairement  $K$  est une partie compacte de  $X_H$  incluse dans  $2^S \setminus \tilde{\beta}$  et si  $K \subset \tilde{A}_k$  alors  $\tilde{A}_k \cap \tilde{\beta} \neq \emptyset$ . D'où  $X_H$  n'est pas  $\aleph_0$ .  $\square$

Un filtre de type produit est  $\aleph_0$  ssi les filtres  $\mathcal{F}_n$  associés sont  $\aleph_0$ .

En utilisant ce qui vient d'être dit, le fait classique que tout espace analytique non dénombrable contient un Cantor et les résultats de [1], on complète le théorème 2.6:

**Corollaire 3.2.** *Pour tout ordinal dénombrable  $\alpha \geq 2$ , dans chaque classe  $\mathbf{A}_\alpha \setminus \mathbf{M}_\alpha$  et  $\mathbf{M}_\alpha \setminus \mathbf{A}_\alpha$ , il existe un  $k$ -filtre non  $\aleph_0$ . Il en est de même pour la classe  $F_\sigma \setminus G_\delta$ .*

*Remarques.* Dans [2], il est demandé si un  $k$ -filtre est automatiquement  $\aleph_0$ . Le corollaire 3.2. répond à cette question par la négative. Subsiste la question : est-ce qu'un  $k$ -filtre  $\aleph_0$  est de type  $\mathcal{A}$  ? La possibilité de construire un  $k$ -filtre  $\aleph_0$  qui soit analytique non  $F_{\sigma\delta}$  répondrait par la négative à cette question (voir [2]).

### BIBLIOGRAPHIQUES

1. J. Calbrix, *Classes de Baire et espaces d'applications continues*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, série I, n° 16, (1985), 759–762. MR **87a**:54021
2. J. Calbrix, *Filtres sur les entiers et ensembles analytiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 305, série I (1987), 109–111. MR **88j**:54051
3. G. Choquet, *Lectures in Analysis*, W. A. Benjamin, New York, 1969. MR **40**:3252;
4. T. Dobrowolski, W. Marciszewski, J. Mogilski, *On topological classification of function spaces  $C_p(X)$  of low Borel complexity*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 307–324. MR **92c**:54017
5. R. Engelking, *General topology*, PWN, Warszawa, 1976. MR **58**:18316b

6. K. Kuratowski, *Topology*, PWN, Warszawa, 1966. MR **36**:840
7. D. Lutzer, J. van Mill, R. Pol, *Descriptive complexity of function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 121–128. MR **87e**:54046

LABORATOIRE A.M.S. URA C.N.R.S. D1378, U.F.R. DES SCIENCES, F76821 MONT SAINT  
AIGNAN CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* `Jean.Calbrix@univ-rouen.fr`